

基于灰色关联度及线性规划的众筹筑屋方案设计

摘要

本文对某众筹筑屋开发项目,进行既有规划方案的全面核算、方案的重新设计规划,以及基于投资回报率的新方案的可执行情况的评判和相应的调整。从而使得众筹筑屋规划方案更加的科学、合理及经济。

问题一,首先对相关数据进行整理,接着建立取得土地支付金额的分摊模型:

$u_i = S_i \times U / \sum_{i=1}^{11} S_i$, 可得分摊到各个房型的土地支付金额(表 5.1.2); 结合前文整理所得

的各房型开发成本,继而建立各项扣除项目费用计算模型:

$F_n = \left[F_n \cdot \varphi_{n-2}, (n=1,2); \sum_{i=1}^2 F_i \cdot \varphi_{n-2}, (n=3,4); X \cdot \varphi_{n-2}, (n=5) \right]$, 得到各项扣除项目金额(表

5.1.3); 按照规定,建立特殊类型住宅的各项费用分摊和扣除项目金额的模型:

$T_{ni} = S_i \times T_n / \sum_{i=1}^2 S_i$ 和 $K = \sum_{n=1}^5 F_n$, 进而建立土地增值额、容积率和最终收益等模型:

$Z = X - K$ 、 $\eta = V_{\text{总建筑}} / V_{\text{总用地}}$ 和 $\tau = X - (K + V + c) + F_4$ 等,对方案 I 进行全面核算,可得:成本投入 $C = 2484163080$ 元、增值税 $V = 148313392$ 元、最终收益 $\tau = 614243527.4$ 元和容积率 $\eta = 2.275$, 详见(表 5.1.16 和 5.1.17)。

问题二,为保障满意比例与各房型规划的匹配合理,首先建立模型计算满意比例对于各房型灰色关联度 $\gamma_i = [0.7215, 0.7575, 0.7775, 0.7846, 0.7937, 0.7955, 0.7999, 0.7956, 0.8250, 0.8440, 0.8427]$ 排除购买意愿外的其他因素;然后将满意和不满意比例的差值与设计套数和关联度乘积

最大值作为目标函数 $\max T = \sum_{i=1}^{11} (n_i - n'_i) \cdot t_i \cdot \gamma_i$, 以准确的切合购买意愿,并对容积率

$\sum_{i=1}^{11} t_i \cdot S_i \cdot r_k / 102077.6 \leq 2.28$ 等进行约束,建立方案 II 设计的线性规划模型,得出规划设计

方案(表 5.2.1); 结合题目一模型,可得方案 II 全面核算结果,增值税 $V = 123459715.1$ 元、最终收益 $\tau = 602543097.8$ 元和容积率 $\eta = 2.2797$, 详见(表 5.2.2 和表 5.2.3)。。

问题三,首先根据相关条件建立投资回报率的计算模型: $\xi = \tau \times 100\% / C$ 可得方案 II 的投资回报率 $\xi = 24.42\% < 25\%$, 需建立调整模型,基于题目二模型添加限制条件

$\xi \geq 25\%$, 运用 LINGO 编写程序^[3]进行计算得调整方案(表 5.3.1), 使 $\xi = 26.45\% > 25\%$ 。

关键词: 众筹筑屋 全面核算 投资回报率 线性规划 灰色关联度 购买意愿

一、问题重述

互联网时代，众筹筑屋是一种新型的房地产形式。现推出占地面积为 102077.6 平方米的众筹筑屋项目（详情见附件 1），有上万户购房者登记参筹。项目规定参筹者每户只能认购一套住房。

请结合本题附件中给出的具体要求及相关政策，建立数学模型，回答如下问题：

1. 依据附件 2 和附件 3 中的相关条例与政策，了解建房规划方案全面核算的组成内容、不同房型的容积率、开发成本、开发费用等在核算上的不同要求，并建立数学模型对此众筹筑屋项目原方案（方案 I）的进行全面核算，并将此众筹筑屋项目原方案（方案 I）的成本与收益、容积率和增值税等相关信息进行公布。

2. 附件 1 给出了调查所得参筹者对 11 种房型购买意愿的比例。为了尽量满足参筹者的购买意愿，请了解建房规划方案设计中，需考虑的容积率、开发成本、税率、预期收益等诸多因素，结合附件中对不同房型的容积率、开发成本、开发费用等的限制条件，建立数学模型，重新设计建设规划方案（方案 II）并对新方案进行全面核算。

3. 一般而言，投资回报率达到 25% 以上的众筹项目才会被成功执行。你们所给出的众筹筑屋方案 II 能否被成功执行？如果能，请说明理由。如果不能，应怎样调整才能使此众筹筑屋项目能被成功执行？

二、问题分析

对问题一的分析：

对于本题中方案 I 的全面核算，首先要解决的是何为众筹房屋项目的全面核算，其全面核算包括哪些内容，然后建立各核算内容的计算模型对其进行求解；基于各内容的计算结果，可进一步建立综合核算模型来完成方案 I 的全面核算。

对问题二的分析：

对于该题，基于参筹者对这 11 种房型的满意比例的调查结果，欲要重新设计建设规划方案，且尽量满足参筹者的购买意见，可试着建立参筹者满意比例对于各房型的灰色关联度模型，确定它们之间的灰色关联度。根据所求结果，结合题目所给各房型套数、容积率等限定条件，可进行线性规划模型的建立，求出新方案的各房型套数规划，从而制定新的建设规划方案（方案 II）。最终，依据题目一中的全面核算模型，即可对新方案进行核算。

对问题三的分析：

对于该题，首先，建立投资回报率的数学模型，以判断投资回报率是否达到 25% 以上，能否被成功执行；若不能执行，需建立方案规划设计的调整模型；在此，可结合题目二的方案设计模型，加入投资回报率的限制条件，以求得其交叉结果，从而得到既可以满足参筹者的购买意愿，又能够成功执行的规划设计方案。

三、模型假设

结合本文的实际情况，为了保证模型建立与求解的严谨性和可信度，我们对一些客观存在又不得不忽略的现实情况作出以下假设：

1、所给数据具有严格准确性。

- 2、对于抽样调查的数据具有严格随机性，可以充分准确的反映普遍现象且具有一定代表性。
- 3、本文扣除项目金额不存在旧房及建筑物的评估价格。
- 4.相关资料显示，目前土地增值额的计算方法有两种，且纳税人不能任意选用。假设本文选用甲种计算方法是合理的。
- 5.假设数据在计算和整理过程中，因四舍五入导致的误差，忽略不计。

四、符号说明

问题一中的符号说明

1. 取得土地支付金额的分摊模型

S_i ：表示各房型的建筑面积；

U ：表示取得土地支付的费用 $U = 777179627$ ；

u_i ：表示分摊到 i 房型的土地支付的费用， $i = 1, 2, \dots, 11$ 分别表示房型 1 至房型 11。

2. 各项扣除项目费用计算模型

F_n ：表示某项扣除项目金额；

X ：表示售房收入；

φ_j ：表示扣除系数， $j \leq 0$ 时， $\varphi = 1$ ； $j = 1$ 时， $\varphi = 10\%$ ； $j = 2$ 时， $\varphi = 20\%$ ；

$j = 3$ 时， $\varphi = 5.65\%$ 。

3. 特殊类型住宅的各项费用分摊计算模型

T_n ：表示特殊住宅原来的某项扣除金额；

T_{ni} ：表示分摊到 i 部分的 T_n 金额， $i = 1$ 时，表示分摊到普通住宅部分的 T_n 金额；

$i = 2$ 时，表示分摊到非普通住宅部分的 T_n 金额；

S_i ：表示不同类型住宅的建筑面积， $i = 1$ 时，表示普通住宅的面积； $i = 2$ 时，表示非普通住宅的面积。

4. 扣除项目金额计算模型

K ：表示扣除项目金额；

5. 土地增值额计算模型

Z ：表示增值额；

V_i ：第 i 级国家征收的土地增值税；

6. 土地增值税计算模型

p ：税率。

7. 容积率计算模型

η ：容积率； $V_{\text{总建筑}}$ ：项目用地范围内总建筑面积；

$V_{\text{总用地}}$: 项目总用地面积。

8. 最终收益计算模型

τ : 企业的最终收益;

c : 未计入增值税核算的开发成本;

问题二中的符号说明

T_{max} : 网民最大满意系数;

n_i : 所给网民对房型*i*的满意比例;

n'_i : 所给网民对房型*i*的不满意比例;

γ_i : 网民满意比例对应第*i*种房型的灰色关联度;

$t_i(\text{max})$: 第*i*种房型的设计套数上限;

$t_i(\text{min})$: 第*i*种房型的设计套数下限;

r_k : 第*k*种房型的容积的(0,1)规划;

问题三中的符号说明

ξ : 投资回报率;

x_i : 第*i*种房型的单位售价, 元/ m^2 ;

b_i : 第*i*种房型的单位开发成本价, 元/ m^2 ;

C : 成本投入, 元;

c_m : 不允许扣除的开发成本, 元;

五、模型的建立与求解

5.1 方案 I 的全面核算

5.1.1 整理原始数据

经过对题意的分析, 我们首先将附件中方案一的数据进行提取与整理计算, 得到便于后续使用的直观数据如下:

表 5.1.1 原始方案直观数据

子项目房型	建筑面积/ m^2	开发成本/元	容积率	售房收入/元
房型 1	19250	82062750	0.19	231000000
房型 2	24500	105913500	0.24	264600000
房型 3	17550	79536600	0.17	196560000
房型 4	36250	191690000	0.36	464000000
房型 5	39000	205452000	0.38	499200000
房型 6	41750	231002750	0.41	567800000
房型 7	44500	252982500	0.44	623000000
房型 8	9450	40852350	0.09	98280000
房型 9	15450	41143350	0.00	98880000
房型 10	19350	54005850	0.00	131580000
房型 11	9975	29745450	0.00	71820000
合计			2.28	3246720000

5.1.2 模型建立与求解

5.1.2.1 取得土地支付金额的分摊模型

根据题意，此开发项目取得土地支付的金额需按各类住宅的销售面积比例分摊计算，对此我们建立取得土地支付金额的分摊计算模型：

$$u_i = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^{11} S_i} \times U$$

式中：

S_i ：表示各房型的建筑面积；

U ：表示取得土地支付的费用 $U = 777179627$ ；

u_i ：表示分摊到 i 房型的土地支付的费用， $i = 1, 2, \dots, 11$ 分别表示房型 1 至房型 11。

将土地支付总费用及表 5.1.1 中各房型的建筑面积数据代入模型，得到如下结果：

表 5.1.2 各房型分摊的土地支付金额

房型	分摊额/元
房型 1	54004901.43
房型 2	68733510.92
房型 3	49235637.41
房型 4	101697541.7
房型 5	109412527.6
房型 6	117127513.5
房型 7	124842499.4
房型 8	26511497.07
房型 9	43344193.62
房型 10	54285446.38
房型 11	27984358.02

5.1.2.2 各项扣除项目费用计算模型

计算扣除项目金额的值是核算项目增值额的关键一步，税法准予纳税人从转让收入中减除的扣除项目金额包括以下几项：

（一）取得土地支付的费用 （二）开发成本 （三）开发费用 （四）其它扣除项目费 （五）与转让房地产有关的税金 （六）旧房及建筑物的评估价格。本题的扣除项目金额由前五项组成，需分别计算。

用 F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 分别表示取得土地支付的费用、开发成本、开发费用、其它扣除项目费、与转让房地产有关的税金，我们建立各项扣除项目费用计算模型：

$$F_n = \begin{cases} F_n \cdot \varphi_{n-2}, & (n=1, 2) \\ \sum_{i=1}^2 F_i \cdot \varphi_{n-2}, & (n=3, 4) \\ X \cdot \varphi_{n-2}, & (n=5) \end{cases}$$

式中：

F_n ：表示某项扣除项目金额；

X ：表示售房收入；

φ_j ：表示扣除系数， $j \leq 0$ 时， $\varphi = 1$ ； $j = 1$ 时， $\varphi = 10\%$ ； $j = 2$ 时， $\varphi = 20\%$ ；

$j = 3$ 时， $\varphi = 5.65\%$ 。

将表 5.1.1 与表 5.1.2 中模型所需数据代入模型，结果如下：

表 5.1.3 各项扣除项目金额

类型	房型	土地使用权的分摊金额/元	开发成本/元	开发费用/元	其他扣除项目/元	与转让房地产有关的税金/元
普通	房型 1	54004901	82062750	13606765	27213530	13051500
	房型 2	68733511	105913500	17464701	34929402	14949900
	房型 3	49235637	79536600	12877224	25754447	11105640
非普通	房型 4	101697542	191690000	29338754	58677508	26216000
	房型 5	109412528	205452000	31486453	62972906	28204800
	房型 6	117127513	231002750	34813026	69626053	32080700
	房型 7	124842499	252982500	37782500	75565000	35199500
	房型 8	26511497	40852350	6736385	13472769	5552820
特殊	房型 11	27984358	29745450	5772981	11545962	4057830
	房型 9	43344194	41143350	8448754	16897509	5586720
	房型 10	54285446	54005850	10829130	21658259	7434270

5.1.2.3 特殊类型住宅的各项费用分摊计算模型

目前我国对土地增值的核算中，普通宅和非普通宅是分开的。根据题意，此开发项目中特殊类型的住宅，在核算扣除项目金额时，各类扣除费用需按照已有普通宅、非普通宅建筑面积比分摊后再计算。

用 T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 分别表示房型 9、房型 10 原取得土地支付的费用、原开发成本、原开发费用、原其它扣除项目费、原与转让房地产有关的税金，我们建立特殊类型住宅的各项费用分摊模型：

$$T_{ni} = \frac{S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} \times T_n$$

式中：

T_n ：表示特殊住宅原来的某项扣除金额；

T_{ni} ：表示分摊到 i 部分的 T_n 金额， $i = 1$ 时，表示分摊到普通住宅部分的 T_n 金额； $i = 2$ 时，表示分摊到非普通住宅部分的 T_n 金额；

S_i ：表示不同类型住宅的建筑面积， $i = 1$ 时，表示普通住宅的面积； $i = 2$ 时，表示非普通住宅的面积。

将表 5.1.1、表 5.1.2、表 5.1.3 中对应的模型所需数据代入模型，结果如下：

表 5.1.4 特殊房型分摊后的土地支付额(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	10969136.42	13738044.64
非普通住宅	32375057.2	40547401.74

表 5.1.5 特殊房型分摊后的开发成本(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	10412167.84	13667287.05
非普通住宅	30731182.16	40338562.95

表 5.1.6 特殊房型分摊后的开发费用(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	2138130	2740533
非普通住宅	6310624	8088596

表 5.1.7 特殊房型分摊后的其它扣除项目额(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	4276261	5481066
非普通住宅	12621248	16177193

表 5.1.8 特殊房型分摊后的与转让房产有关的费用(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	1413834	1881394
非普通住宅	4172886	5552876

同理，仿照各项费用分摊计算模型亦可以计算出特殊房型分摊的售房收入额：

表 5.1.9 特殊房型分摊后的售房收入额(单位：元)

住宅类型	房型 9	房型 10
普通住宅	25023610.28	33299015.38
非普通住宅	73856389.72	98280984.62

5.1.2.4 扣除项目金额计算模型

在以上模型的建立与求解的基础上，我们建立扣除项目金额计算模型：

$$K = \sum_{n=1}^5 F_n$$

式中

K ：表示扣除项目金额；

F_n ：表示某项扣除金额。

结合表 5.1.3~表 5.1.8，将分摊处理后各房型的数据代入扣除项目金额计算模型，整理出如下结果：

表 1.10 各房型的各项扣除金额与扣除项目金额(单位：元)

住宅类型	子项目房型	取得土地使用权的分摊金额	开发成本	开发费用	其他扣除项目	与转让房地产有关的税金	扣除项目金额
普通宅	房型 1	54004901	82062750	13606765	27213530	13051500	189939447
	房型 2	68733511	105913500	17464701	34929402	14949900	241991014
	房型 3	49235637	79536600	12877224	25754447	11105640	98972949

	房型 9	10969136	10412168	2138130	4276261	1413834	29209530
	房型 10	13738045	13667287	2740533	5481066	1881394	37508326
非普通宅	房型 4	101697542	191690000	29338754	58677508	26216000	407619804
	房型 5	109412528	205452000	31486453	62972906	28204800	437528686
	房型 6	117127513	231002750	34813026	69626053	32080700	484650043
	房型 7	124842499	252982500	37782500	75565000	35199500	526371999
	房型 8	26511497	40852350	6736385	13472769	5552820	52273471
	房型 11	27984358	29745450	5772981	11545962	4057830	49361130
	房型 9	32375057	30731182	6310624	12621248	4172886	86210997
	房型 10	40547402	40338563	8088596	16177193	5552876	110704630

5.1.2.5 土地增值额计算模型

$$Z = X - K$$

式中：

Z ：表示增值额； X ：表示各类型住宅的总售房收入； K ：表示各类型住宅的总扣除项目金额。

结合以上各表数据，求得两种类型住宅的增值额，并将结果整理如下：

表 5.1.11 两种类型住宅的增值额(单位：元)

住宅类型	总扣除项目金额 (K)	总售房收入 (X)	增值额 (Z)
普通宅	597621264.8	750482625.7	152861361
非普通宅	2154720760	2496237374	341516614

5.1.2.6 土地增值税计算模型

资料显示，目前我国土地增值税实行四级超率累进税率，以增值额与扣除项目金额的比率（增值率）大小，按相适用的税率累进计算征收的。表 1.11 给出了土地增值税四级超率累进税率表：

表 5.1.12 土地增值税四级超率累进税率表

级 距	税率	速算扣除系数
增值额未超过扣除项目金额 50%的部分	30%	0
增值额超过扣除项目金额 50%，未超过 100%的部分	40%	5%
增值额超过扣除项目金额 100%，未超过 200%的部分	50%	15%
增值额超过扣除项目金额 200%的部分	60%	35%

依据上表以及现存资料，我们建立土地增值税分级速算模型：

$$\begin{cases} V_1 = Z \times 30\% & (Z \leq 50\%k, p = 30\%); \\ V_2 = Z \times 40\% - k \times 5\% & (50\%k < Z \leq 100\%k, p = 40\%); \\ V_3 = Z \times 50\% - k \times 15\% & (100\%k < Z \leq 200\%k, p = 50\%); \\ V_4 = Z \times 60\% - k \times 35\% & (Z > 200\%k, p = 60\%). \end{cases}$$

式中：

V_i ：第*i*级国家征收的土地增值税； Z ：增值额； k ：扣除项目金额； p ：税率。

此外，普通宅和非普通宅需分别计算，在上文对增值额的求解过程中，我们也已经完成了特殊类型住宅各项指标按普通宅与非普通宅面积比例的分摊。接下来我们分别对两种类型住宅的土地增值税进行计算。

基于上文数据和模型求解，得到如下结果：

表 5.1.13 两种类型住宅增值税

住宅类型	总扣除项目金额/元	增值额/元	增值率	适用税率	增值税/元
普通宅	597621264.8	152861361	25.57%	30%	45858408
非普通宅	2154720760	341516614	15.85%	30%	102454984

注：为了确保核算过程的严谨性，我们考虑了我国现行的土地增值税优惠政策。依据附件资料以及前文的计算结果，此开发项目不满足任何一条优惠政策，所以上表所得增值税值即为最终增值税的值。

5.1.2.7 容积率计算模型

$$\eta = \frac{V_{\text{总建筑}}}{V_{\text{总用地}}}$$

式中： η ：容积率； $V_{\text{总建筑}}$ ：项目用地范围内总建筑面积； $V_{\text{总用地}}$ ：项目总用地面积。

5.1.2.8 最终收益计算模型

开发项目的最终收益也是方案信息必须公布的一项重要内容，在前文的基础上，我们建立开发项目的最终收益计算模型：

$$\tau = X - (K + V + c) + F_4$$

式中：

τ ：企业的最终收益； X ：售房总收入； K ：允许的扣除项目金额； c ：不允许扣除的开发成本； V ：土地增值税； F_4 ：其它扣除项目的金额。

注： $c = c_3 + c_8 + c_{11}$ （ c_3 ：房型 3 的开发成本， c_8 ：房型 8 的开发成本， c_{11} ：房型 11 的开发成本）。表 5.1.13 给出了 c_3, c_8, c_{11} 的值。

表 5.1.14 不计入增值税核算的开发成本(单位：元)

房型	开发成本
房型 3	79536600
房型 8	40852350
房型 11	29745450
合计	150134400

将模型所需数据代入模型，计算结果如下：

表 5.1.15 开发项目最终收益(单位：元)

住宅类型	总售房收入	成本投入	增值税	最终收益
普通住宅	750482625.7	579503156	45858408	125121058.6
非普通住宅	2496237374	1904659922	102454984	489122468.8
合计	3246720000	2484163080	148313392	614243527.4

于是经过对方案 I 的全面核算，我们将相关信息公布如下：

表 5.1.16 方案 I 核算信息公布表（一）

住宅类型	子项目房型	取得土地使用权的分摊金额/元	开发成本/元	开发费用/元	其他扣除项目/元	与转让房地产有关的税金/元	扣除项目金额/元
普通宅	房型 1	54004901	82062750	13606765	27213530	13051500	189939447
	房型 2	68733511	105913500	17464701	34929402	14949900	241991014

	房型 3	49235637	79536600	12877224	25754447	11105640	98972949
	房型 9	10969136	10412168	2138130	4276261	1413834	29209530
	房型 10	13738045	13667287	2740533	5481066	1881394	37508326
合计		196681230	291592305	48827353	97654706	42402268	597621266
非普通宅	房型 4	101697542	191690000	29338754	58677508	26216000	407619804
	房型 5	109412528	205452000	31486453	62972906	28204800	437528686
	房型 6	117127513	231002750	34813026	69626053	32080700	484650043
	房型 7	124842499	252982500	37782500	75565000	35199500	526371999
	房型 8	26511497	40852350	6736385	13472769	5552820	52273471
	房型 11	27984358	29745450	5772981	11545962	4057830	49361130
	房型 9	32375057	30731182	6310624	12621248	4172886	86210997
房型 10	40547402	40338563	8088596	16177193	5552876	110704630	
合计		580498396	1022794795	160329319	320658639	141037412	2154720760

表 5.1.17 方案 I 核算信息公布表 (二)

住宅类型	子项目房型	容积率	成本投入/元	总收入/元	增值额/元	增值税/元	最终收益/元
普通宅	房型 1	0.18858202	162725916.9	231000000	152861361	45858408	125121058.6
	房型 2	0.24001348	207061612.2	264600000			
	房型 3	0.171928023	152755101.6	196560000			
	房型 9	0	24933269	25023610.28			
	房型 10	0	32027259.56	33299015.38			
非普通宅	房型 4	0.355121986	348942296.2	464000000	341516614	102454984	489122468.8
	房型 5	0.382062274	374555779.9	499200000			
	房型 6	0.409002563	415023989.5	567800000			
	房型 7	0.435942851	450806999.2	623000000			
	房型 8	0.092576628	79653052.19	98280000			
	房型 11	0	67560618.42	71820000			
	房型 9	0	73589749	73856389.72			
房型 10	0	94527436.7	98280984.62				
合计		2.275229825	2484163080	3246720000	494377975	148313392	614243527.4

5.2 方案 II 的规划设计和核算

为保障满意比例与各房型规划的匹配合理,在此建立满意比例对于各房型的灰色关联度以排除购买意愿外的其他因素。

5.2.1 灰色关联矩阵的确定^[2]

设系统行为序列: $Y_i = (y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(n)), i = 1, 2, \dots, p;$

相关因素序列: $X_j = (x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(n)), j = 1, 2, \dots, m; \forall \xi \in (0, 1),$ 令

$$\gamma(y_i(k), x_j(k)) = \frac{\min_i \min_j \min_k |y_i(k) - x_j(k)| + \xi \max_i \max_j \max_k |y_i(k) - x_j(k)|}{|y_i(k) - x_j(k)| + \xi \max_i \max_j \max_k |y_i(k) - x_j(k)|}$$

为第 j 个因素 X_j 对第 i 个行为序列 Y_i 在 k 点的关联系数, 其中 $k = 1, 2, \dots, n;$

令 $\gamma(Y_i, X_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(y_i(k), x_j(k))$ 为第 j 个因素 X_j 对第 i 个行为序列 Y_i 的关联度, 简记为 γ_{ij} .

可得以下灰色关联矩阵:

$$\Gamma = (\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \cdots & \gamma_{pm} \end{pmatrix}$$

5.2.2 灰色关联序的确定

设系统行为序列 $Y_i = (y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(n)), i = 1, 2, \dots, p$; 相关因素序列为:

$$X_j = (x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(n)), j = 1, 2, \dots, m$$

且 $\Gamma = (\gamma_{ij})$ 为其关联矩阵, 若 $\exists l, q \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $\gamma_{il} \geq \gamma_{iq}, i = 1, 2, \dots, p$, 则称相关因素

X_l 优于 X_q , 记为 $X_l \succ X_q$. 即对 Y_i 的影响程度而言, 因素 X_l 强于 X_q .

5.2.3 求关联度与关联序的步骤

①对各数据做无量纲处理. 常用的无量纲化方法有初值化算子, 均值化算子, 区间值化算子, 且在数量上归一, 本文用初值化算子, 令:

$$X'_j = \frac{X_j}{x_j(1)} = (x'_j(1), x'_j(2), \dots, x'_j(n)), j = 1, 2, \dots, m;$$

$$Y'_i = \frac{Y_i}{y_i(1)} = (y'_i(1), y'_i(2), \dots, y'_i(n)), i = 1, 2, \dots, p;$$

②求差序列, 记 $\Delta_j(k) = |y'_i(k) - x'_j(k)|, j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, p$.

③求两极最大差与最小差, $M = \max_j \max_k \Delta_j(k), m = \min_j \min_k \Delta_j(k)$.

④求关联系数 $\gamma_{ij}(k) = \frac{m + \xi M}{\Delta_j(k) + \xi M}, \xi \in (0, 1), k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, p$.

⑤计算关联度 $\gamma(Y_i, X_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(y_i(k), x_j(k))$, 得到关联度矩阵 Γ .

⑥进行优势分析. 若 $\gamma_{il} \geq \gamma_{iq}, i = 1, 2, \dots, p$, 则相关因素 X_l 优于相关因素 X_q , 即 X_l 为关键因素.

5.2.4 模型的求解

运用上述模型, 建立网民满意比例和所给的 11 种房型的灰色关联度进行求解. 其中 11 种房型网民满意比例情况为:

$$Y_i = [0.4, 0.6, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.6, 0.2, 0.3, 0.4]$$

每种房型的房型面积、建房套数、开发成本和售价的情况为：

$$X_i = \begin{bmatrix} 77 & 98 & 117 & 145 & 156 & 167 & 178 & 126 & 103 & 129 & 133 \\ 250 & 250 & 150 & 250 & 250 & 250 & 250 & 75 & 150 & 150 & 75 \\ 4263 & 4323 & 4532 & 5288 & 5268 & 5533 & 5685 & 4323 & 2663 & 2791 & 2982 \\ 12000 & 10800 & 11200 & 12800 & 12800 & 13600 & 14000 & 10400 & 6400 & 6800 & 7200 \end{bmatrix}$$

通过上述数据，结合所建立的灰色关联度模型，运用 MATLAB 编写程序^[1]，可得网民满意比例和所给的 11 种房型的灰色关联度为：

$$\gamma_i = [0.7215 \quad 0.7575 \quad 0.7775 \quad 0.7846 \quad 0.7937 \quad 0.7955 \quad 0.7999 \quad 0.7956 \quad 0.8250 \quad 0.8440 \quad 0.8427]$$

5.2.5 建设规划方案的重新设计

根据所给条件和上述所求网民满意比例和所给的 11 种房型的灰色关联度，可建立以下设计模型。

5.2.5.1 模型的建立

为保障满意比例与各房型的匹配合理，且尽量满足参筹者的购买意愿；在此，运用满意比例和不同意比例的差值与设计套数和满意比例对于各房型灰色关联度的乘积最大值（网民最大满意系数）作为目标函数，该目标函数，既能运用灰色关联度，排除影响购买意愿的非相关因素；又可以在满意比例和不同意比例的差值下，更加准确的切合网民的购买意愿，即：

$$\max T = \sum_{i=1}^{11} (n_i - n'_i) \cdot t_i \cdot \gamma_i$$

对于该模型还需对其容积率进行约束，使得设计容积率不得大于国家规定的最大容积率要求，即：

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} t_i \cdot S_i \cdot r_k}{102077.6} \leq 2.28$$

通过上述条件可建立以下方案的重新设计规划模型如下：

$$\max T = \sum_{i=1}^{11} (n_i - n'_i) \cdot t_i \cdot \gamma_i$$

$$s.t. \begin{cases} t_i (\min) \leq t_i \leq t_i (\max) \\ t_i \in Z^* \\ r_k = 1, (k = 1, 2, 3, \dots, 8) \\ r_k = 0, (k = 9, 10, 11) \\ \frac{\sum_{i=1}^{11} t_i \cdot S_i \cdot r_k}{102077.6} \leq 2.28 \\ i = 1, 2, 3, \dots, 11 \end{cases}$$

式中：

- T_{\max} : 网民最大满意系数;
 n_i : 所给网民对房型*i*的满意比例;
 n'_i : 所给网民对房型*i*的不满意比例;
 t_i : 第*i*种房型的设计规划套数;
 γ_i : 网民满意比例对应第*i*种房型的灰色关联度;
 $t_i(\max)$: 第*i*种房型的设计套数上限;
 $t_i(\min)$: 第*i*种房型的设计套数下限;
 r_k : 第*k*种房型的容积的(0,1)规划;
 S_i : 第*i*种房型的设计面积, m^2 。

根据所给数据、计算结果及上述建立的模型, 运用 LINGO 编写程序^[2], 进行计算可得下述结果:

该模型求解的定义网民最大满意系数: $T_{\max}=536.68$, 容积率: $\eta=2.2797$; 重新设计的建设规划方案为:

表 5.2.1 重新设计的建设规划方案表

房型	房型面积/ m^2	建房套数	开发成本 (元/ m^2)	售价 (元/ m^2)
房型 1	77	50	4263	12000
房型 2	98	50	4323	10800
房型 3	117	50	4532	11200
房型 4	145	150	5288	12800
房型 5	156	289	5268	12800
房型 6	167	350	5533	13600
房型 7	178	450	5685	14000
房型 8	126	101	4323	10400
房型 9	103	50	2663	6400
房型 10	129	50	2791	6800
房型 11	133	50	2982	7200

5.2.6 方案 II 核算

根据上述规划的新方案, 结合题目一的核算模型进行计算可较为容易的得出新方案(方案 II)的核算结果, 详见下表:

表 5.2.2 方案 II 核算信息公布表 (一)

住宅类型	子项目 房型	取得土地使用权 的分摊金额/元	开发成本/元	开发费用/元	其他扣除项目 /元	与转让房地产 有关的税金/元	扣除项目金额/ 元
普通宅	房型 1	11922782.77	16412550	2833533.277	5667066.554	2610300	39446232.6
	房型 2	15174450.8	21182700	3635715.08	7271430.16	2989980	50254276.04
	房型 3	18116436.16	26512200	4462863.616	8925727.231	3701880	35206907
	房型 9	972804.1406	836526.4455	180933.0586	361866.1172	113589.1711	2465718.933
	房型 10	1216769.497	1096607.593	231641.31	463282.6201	151153.5511	3162490.582
非普通宅	房型 4	67355980.58	115014000	18236998.06	36473996.12	15729600	252810574.8

房型 5	139617334.6	237502512	37711984.66	75423969.33	32604748.8	522860549.4
房型 6	181009520.2	323403850	50441337.02	100882674	44912980	700650361.3
房型 7	248055818.1	455368500	70342431.81	140684863.6	63359100	977810713.6
房型 8	39410216.5	55014498	9442471.45	18884942.9	7477797.6	75215428.45
房型 9	14975853.33	12877923.55	2785377.689	5570755.377	1748650.829	37958560.78
房型 10	18700925.76	16854118.41	3566006.907	7132013.815	2326936.449	48685026.24
房型 11	20593897.51	19830300	4042419.751	8084839.502	2705220	35426376.77

表 5.2.3 方案 II 核算信息公布表 (二)

住宅类型	子项目房型	容积率	成本投入/元	总收入/元	增值额/元	增值额/元	最终收益/元
普通宅	房型 1	0.037716404	33779166.05	46200000	38790086.74	11637026.02	23330233.4
	房型 2	0.048002696	42982845.88	52920000			
	房型 3	0.057309341	52793379.77	65520000			
	房型 9	0	2103852.816	2010427.807			
	房型 10	0	2699207.962	2675284.09			
非普通宅	房型 4	0.213073191	216336578.6	278400000	372742296.8	111822689	579212864.4
	房型 5	0.441663989	447436580.1	577075200			
	房型 6	0.572603588	599767687.3	794920000			
	房型 7	0.784697132	837125850	1121400000			
	房型 8	0.124669859	111344983.6	132350400			
	房型 11	0	47171837.26	47880000			
	房型 9	0	32387805.4	30949572.2			
	房型 10	0	41553012.43	41184715.9			
合计		2.279736201	2467482787	3193485600	411532383.5	123459715.1	602543097.8

5.3 方案 II 的可执行情况判断及调整

5.3.1 投资回报率的计算

根据本题要求, 投资回收率达到 25% 以上的众筹项目才会被成功执行。为判断所给出的众筹筑屋方案 II 能否被成功执行; 在此建立投资回收率计算模型, 进行计算判断。

5.3.1.1 模型的建立

根据上述题目二中的计算结果, 进行投资回报率的计算, 建立求解投资回报率的数学模型如下:

根据前文题目的计算可知:

成本投入为:

$$C = \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + \left(\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U \right) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\%$$

扣除项目金额为:

$$K = C + \left(\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U \right) \times 20\% - c_m \quad (m = 3, 8, 11)$$

增值税为:

$$V = \left(\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - K \right) \cdot p$$

最终收益为:

$$\tau = \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - (C + V)$$

投资回报率为:

$$\xi = \frac{\tau}{C} \times 100\%$$

即:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\% + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - K) \cdot 30\%)}{\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\%} \times 100\%$$

式中:

ξ : 投资回报率;

s_i : 第*i*种房型的单位面积, m^2 ;

t_i : 第*i*种房型的设计规划套数, 套;

x_i : 第*i*种房型的单位售价, 元/ m^2 ;

b_i : 第*i*种房型的单位开发成本价, 元/ m^2 ;

U : 取得土地支付的金额, 在这里为777179627元;

C : 成本投入, 元;

c_m : 不允许扣除的开发成本, 元。

$m = (3, 8, 11); i = (1, 2, 3, \dots, 11)$

5.3.1.2 模型的求解

根据上述所建立的投资回报率模型, 基于上述题目二计算的结果和所给数据, 代入上述数学模型, 运用 excel 可计算出方案 II 的投资回报率为:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\% + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - K) \cdot 30\%)}{\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\%} \times 100\%$$

$$\xi = 24.42\% < 25\%$$

通过上述计算结果, 因为 $\xi = 24.42\% < 25\%$, 故, 在此需对方案 II 进行调整。

5.3.2 调整模型的建立

因为方案的投资回报率不满足题目要求; 故, 须结合所给数据和题目二的方案规划设计模型, 基于投资回报率的计算模型, 进行方案规划设计模型的调整。

5.3.2.1 调整模型的建立

$$\max T = \sum_{i=1}^{11} (n_i - n'_i) \cdot t_i \cdot \gamma_i$$

$$\begin{cases}
t_i(\min) \leq t_i \leq t_i(\max) \\
t_i \in Z^* \\
r_k = 1, (k = 1, 2, 3, \dots, 8) \\
r_k = 0, (k = 9, 10, 11) \\
\frac{\sum_{i=1}^{11} t_i \cdot S_i \cdot r_k}{102077.6} \leq 2.28 \\
C = \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\% \\
s.t \begin{cases}
K = C + (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% - c_m \\
V = (\sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - K) \cdot 30\% \\
\tau = \sum_{i=1}^{11} (s_i \cdot t_i \cdot x_i) - (C + V) \\
\xi = \frac{\tau}{C} \times 100\% \\
\xi \geq 25\% \\
m = 3, 8, 11; i = 1, 2, 3, \dots, 11
\end{cases}
\end{cases}$$

式中:

- ξ : 投资回报率;
- s_i : 第*i*种房型的单位面积, m^2 ;
- t_i : 第*i*种房型的设计规划套数, 套;
- x_i : 第*i*种房型的单位售价, 元/ m^2 ;
- b_i : 第*i*种房型的单位开发成本价, 元/ m^2 ;
- U : 取得土地支付的金额, 在这里为777179627元;
- C : 成本投入, 元;
- c_m : 不允许扣除的开发成本, 元;
- K : 扣除项目金额, 元;
- V : 增值税, 元。

5.3.2.2 模型的求解

结合上述方案设计规划调整模型, 基于所给和所求的相关数据, 运用 LINGO 软件编写程序^[3]进行求解, 结果详见下表:

表 5.3.1 方案设计规划调整结果表

房型	房型面积/ m^2	建房套数	开发成本 (元/ m^2)	售价 (元/ m^2)
房型 1	77	50	4263	12000

房型 2	98	50	4323	10800
房型 3	117	50	4532	11200
房型 4	145	151	5288	12800
房型 5	156	289	5268	12800
房型 6	167	350	5533	13600
房型 7	178	450	5685	14000
房型 8	126	100	4323	10400
房型 9	103	50	2663	6400
房型 10	129	292	2791	6800
房型 11	133	51	2982	7200

通过对上述计算结果的分析，应用上述计算结果，可得调整后的投资回报率为：

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot x_i) - (\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) + (\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\% + (\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot x_i) - C - c_m) \cdot 30\%}{\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U + (\sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot b_i) + U) \times 10\% + \sum_{i=1}^{11}(s_i \cdot t_i \cdot x_i) \times 5.65\%} \times 100\%$$

$$\xi = 26.45\% > 25\%$$

且容积率满足国家规定的最大容积率要求，即：

$$\eta = \frac{V_{\text{总建筑}}}{V_{\text{总用地}}} = \frac{\sum_{i=1}^{11} s_i \cdot t_i}{102077.6} \approx 2.2799 < 2.28$$

运用此调整模型所得的设计规划方案，既能满足投资回报率的要求，又满足国家规定的最大容积率要求，且满足参筹者的购买意愿。

六、模型的评价与推广

本文针对所给的题目，所建立的模型可充分有效的进行解决；且本文建立的模型具有很强的针对实用性，求和形式的表达简洁又不失准确性；对于数据整理成表，清晰直观；运用灰色关联度分析模型，进行大胆的创新和相关模型的变异，从而得到参筹者对各房型的满意比例与各房型的关灰色联度，动态分析出参筹者的最大满意系数与房型规划方案之间的定量关系，使得规划方案科学合理。

对于所建立的模型不仅适用于本文相关问题，且能够有效的解决物流、经济学、建筑工程和交通流等问题的解决。

参考文献

- [1] 李先成、陈进军，《土地增值税清算的两种计算方法》，<http://www.shui5.cn/article/7f/61277.html>，（2015年9月12日）。
- [2] 刘思峰、党耀国、方志耕等，《灰色系统理论及应用（第五版）》P63~P104，[M]. 北京：科学出版社，2009年5月。

附录

1、MATLAN 程序^[1]

```
clear
clc
x=[77 250 4263 12000;
98 250 4323 10800;
117 150 4532 11200;
145 250 5288 12800;
156 250 5268 12800;
167 250 5533 13600;
178 250 5685 14000;
126 75 4323 10400;
103 150 2663 6400;
129 150 2791 6800;
133 75 2982 7200];
m=11;
n=4;
x0=[0.4 0.6 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 0.6 0.2 0.3 0.4];
for j=1:11
    for i=1:4
        B(j,i)=x(j,i)/x(j,1)
    end
end
for j=1:11
    for i=1:4
        C(j,i)=x0(1,i)/x0(1,1)
    end
end
for j=1:m
    for i=1:4
        A(j,i)=abs((B(j,i)-C(1,i)))
    end
end
a=max(max(A));
b=min(min(A));
for j=1:m
    for i=1:4
        f(j,i)=(b+0.5*a)/(A(j,i)+0.5*a);
    end
end
for j=1:m
    c(j)=mean(f(j,:));
end
```

end

2、LINGO 程序^[2]

```
sets:
fx/1..11/:n,ts,tmax,tmin,s,r,c,n1;
endsets
data:
c=0.7215,0.7575,0.7775,0.7846,0.7937,0.7955,0.7999,0.7956,0.8250,0.8440,0.8427;
n=0.4,0.6,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,0.6,0.2,0.3,0.4;
n1=0.6,0.4,0.5,0.4,0.3,0.2,0.1,0.4,0.8,0.7,0.6;
tmax=450,500,300,500,550,350,450,250,350,400,250;
tmin=50,50,50,150,100,150,50,100,50,50,50;
s=77,98,117,145,156,167,178,126,103,129,133;
r=1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0;
enddata
max=@sum(fx(k)|k#ge#1:((n(k)-n1(k))*ts(k)*c(k)));
@for(fx(k)|k#ge#1:ts(k)<=tmax(k));
@for(fx(k)|k#ge#1:ts(k)>=tmin(k));
@sum(fx(k)|k#ge#1:ts(k)*s(k)*r(k))/102077.6<=2.28;
@for(fx(k):@gin(ts(k)));
```

3、LINGO 程序^[3]

```
sets:
fx/1..11/:n,ts,tmax,tmin,s,r,c,n1,b,x;
endsets
data:
b=4263,4323,4532,5288,5268,5533,5685,4323,2663,2791,2982;
x=12000,10800,11200,12800,12800,13600,14000,10400,6400,6800,7200;
c=0.7215,0.7575,0.7775,0.7846,0.7937,0.7955,0.7999,0.7956,0.8250,0.8440,0.8427;
n=0.4,0.6,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,0.6,0.2,0.3,0.4;
n1=0.6,0.4,0.5,0.4,0.3,0.2,0.1,0.4,0.8,0.7,0.6;
tmax=450,500,300,500,550,350,450,250,350,400,250;
tmin=50,50,50,150,100,150,50,100,50,50,50;
s=77,98,117,145,156,167,178,126,103,129,133;
r=1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0;
enddata
max=@sum(fx(k):((n(k)-n1(k))*ts(k)*c(k)));
@for(fx(k)|k#ge#1:ts(k)<=tmax(k));
@for(fx(k)|k#ge#1:ts(k)>=tmin(k));
@sum(fx(k)|k#ge#1:ts(k)*s(k)*r(k))/102077.6<=2.28;
@for(fx(k):@gin(ts(k)));
p10=@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*b(k))+777179627;
p11=(@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*b(k))+777179627)*0.1;
```

```

p12=@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*x(k))*0.0565;
p1=p10+p11+p12;
p2=p1+ (@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*b(k))+777179627)*0.2-b (3) *s (3) *ts (3) -b (8) *s (8) *ts (8) -b
(11) *s (11) *ts (11) ;
p3=(@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*x(k))-p2)*0.3;
p4=@sum(fx(k):s(k)*ts(k)*x(k))-p1-p3;
(p4/ (p10+p11+p12+p3) ) >=0.25;

```