纤维丛与规范场

1、流形上的联络

在广义相对论建立以后，时空上的各种量的平行移动便不再是一个绝对的，理所当然的性质了，而是在一定的规则下具有一定的选择规范性。而描述一个量的平行移动最自然最一般的方式便是联络了。现在，我们的讨论不限于时空上，而是一般光滑流形。所谓联络，顾名思义，便是联系不同点之间的量在某条路径下平行移动的关系的一个流形结构。

更一般而言，我们描述物质或者物质场都是用的线性空间。比如，对于相对论中的经典点粒子，描述其运动是用其四速度，当其四速沿其世界线平行移动时，这条世界线便是该粒子实际的运动轨迹（当只考虑引力作用，而没有其余力的作用时），这里需要的便是切空间在曲线下平行移动的性质。

现在，让我们来考虑电子，我们都知道，电子除了其轨道运动，还具有其一个内禀性质：自旋。所以，描述电子运动，我们不仅需要用到切空间，还需要引入一个描述自旋的空间，不仅需要知道切空间在某条曲线下平行移动的性质，还需要知道电子自旋空间沿曲线平行移动的性质。简单来说，假如你手你拿着一个电子，以你头顶作为 z 轴，开始的时候，电子处于 z 方向的本征态，当你经过某个过程之后，它应该处于一个怎样的状态？这便需要知道电子内禀空间沿某条线的平行移动的性质。根据局部等效原理，我们知道，对做测地运动（自由下落）无自转观者，其局部范围内的所有物理过程和惯性系中的物理过程相同，那么，我们很容易理解，在局部等效惯性系中，如果电子最开始处于 z 方向的本征态，在经历一段时间过后，它仍然还是处于 z 方向的本征态。而对于这个 z 方向，是选取的是自由无自下落无自转观者的上方，z 方向也是作为它世界线上的矢量，并且这个矢量是沿其世界线平行移动的。那么，从刚才的分析，我们不难得出这样一个结论，代表电子自旋的内禀空间的平行移动是依赖于、或者严格说是至少部分依赖于切空间的平行移动。在后面的分析中，我们便能知道，确实只是部分依赖于时空坐标，还有一个复相位部分是不依赖于时空的，是另一个自由的、满足一定规范条件的平行移动分支，而正是由于它不依赖与时空切空间平行移动的性质，才能让我们引入另外一种限制它平行移动的量：电磁相互作用。或者简单来说，电磁相互作用存在的原因便是为了规范这种新的自由性。

在现代理论的研究中，我们不断的发现新的粒子，引进新的自由度。在时空中引入了许多描述粒子新的内禀属性的内禀线性空间。这些内禀线性空间的引入也导致了许多新的不能用现在已知的时空或者物质之间的作用规范的平行移动，从而让我们需要对时空中的平行移动进行一种广义的定义和研究。

现代量子物理主要研究的是场，是以场作为最基本的结构然后进行量子化研究的。比如描述玻色子，我们便是用复标量场或者是实标量场进行研究的。而描述费米子则是应用旋量场进行研究的。所谓时空上的场，或者广义来说，流行上的场，用通俗的语言便是在流行每个点上定义一个量，在这里，一般来说这样一个量应该是一个矢量。在不过分强调的情况下，我们之后的研究都是基于矢量空间之上的，维数都是 m 维，且所有的矢量场都是至少 2 阶可导。

定义 1.1：设M是一个微分流行，流行M上的一个取值在线性空间V中的C^r向量场v是一个C^r类映射：

$$v: \quad M \to V$$

记流形M上关于向量空间V的向量场为$\Gamma(V(\mathrm{M}))$

当我在时空上用上面的方法定义了向量场之后，便给出了描述物质场的一种结构。但是，不难发现，这还是不够的，因为物质场在时空中的分布不是任意的，而是满足一定的约束方程，而约束方程中不乏含有对时空的导数项（比如描述玻色子的 Klein-Gordon 方程$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$中便含有对标量场$\phi$的时空导数项），就难免需要对时空中各点之间的向量场的向量进行比较，那么不可避免的就要引入平行移动，也就是联络的概念。

以上分析我们知道，要描述一个物理场，就应该构建一个从时空到描述该物质性质的线性空间的映射。为了求场量沿时空的导数，我们便需要引入该向量沿线平行移动的性质。为了可以更方便、更自然的描述物质场，我们可以把描述物质场的这个线性空间粘贴在时空上，为了很好的定义平行移动的概念，就需要建立不同点之间的线性空间之间的联系，很自然的我们应该能想到，我们不能这样单纯的把线性空间粘贴起来，而应该把这些线性空间光滑的粘贴在时空上，让他们构成一个更大的光滑流形。

定义 1.2:设F、M和P是一个流形，存在到上的（满射）光滑投影映射π：$P \to M$，满足：

$\forall x \in M$,存在$U \subset M$是x的领域，使得$\pi^{-1}[U]$和$U \times F$微分同胚。

则称P是以M为底流形，F为其纤维结构的纤维丛。

注：其中$\pi^{-1}[U]$定义为$\pi^{-1}[U] := \{p \in P \,|\, \pi[x] = p, \forall x \in U\}$。

定义 1.2：$V(M)$称为M上的矢丛，若$V(M)$是以M为底流形，V为其纤维结构的纤维丛。

定义 1.3：矢丛$V(M)$上的一个C^r类截面v是个C^r映射v：$M \to V(M)$。满足：$\pi \circ v = id : M \to M$

从上面的定义可以看出，流形M上的一个取值在向量空间V上的一个C^r类向量场就是以流形M为底，V为其纤维结构的矢丛$V(M)$上的一个C^r类截面。那么，当我们有了这样的联系之后，我们便可以把向量在流形上沿某条路径平行

移动转化到向量丛空间中进行研究。为了用向量丛很好的研究平行移动，我们先对流形上的曲线下一个定义。

定义 1.4：设M是一个光滑流行，M上的一条C^r类曲线γ是一个C^r映射γ：

$$\mathbb{R} \to M$$
$$t \mapsto \gamma(t) \in M$$

有了以上的一些基本定义之后，下面我们便可以对矢量场沿某条曲线的平行移动进行研究了。首先，我们先在不引入丛的概念下引入平行移动的概念。先从时空中物质和物质场属性空间平行移动的性质出发，将其抽象化为构建成流形上联络的数学定义。

注：记x点的一个向量空间为V_x。

直观来看，假设你手中拿了两个回转仪，即该仪器的指针是自由的，你的运动只对其质心有作用，不难相信，如果两个回转移的指针开始有θ的夹角，不难相信，无论你做何种运动，经历何种过程，它们之间的夹角都保持不变。用数学语言将其抽象出来便是：设$v_1, v_2 \in V_x, v = v_1 + v_2, x \in M$，将两矢量经过任何曲线平移到$x' \in M$，平移后的矢量满足$v' = v'_1 + v'_2$。并且不难相信，这样的条件给出的更一个一般性的描述便是平行移动保线性关系。

定义 1.5：设M是一个光滑微分流形，$\gamma : \mathbb{R} \to M$是$M$上的一条曲线，则定义可逆线性映射$\mathrm{P}_{t_0}^{t}(\gamma)$：$V_{\gamma_0} \to V_{\gamma_t}$，满足

$$v_1, v_2 \in V_{\gamma_o}, \lambda, \mu \in F$$

（a）线性性：$\mathrm{P}_{t_0}^{t}(\gamma)(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \mathrm{P}_{t_0}^{t}(\gamma)(v_1) + \mu \mathrm{P}_{t_0}^{t}(\gamma)(v_2)$

（b）在曲线参数变换下：$t \to t' = t'(t)$，$\gamma \to \gamma' : t' \mapsto \gamma'(t') \in M$，

$\gamma'(t') = \gamma(t)$，$\forall v \in V_x$满足：

$\mathrm{P}_{t_0'}^{t_1'}(\gamma')(v) = \mathrm{P}_{t_0}^{t_1}(\gamma)(v)$　　　其中$\gamma'(t_0') = \gamma(t_0)$；$\gamma'(t_1') = \gamma(t_1)$

则称$\mathrm{P}_{t_0}^{t}(\gamma)$是矢量空间流形$M$上矢量空间$V$沿曲线$\gamma$从$\gamma_0$到$\gamma_t$的平行移动算符。

从以上的定义，我们可以看出，在作参数变换的前后，曲线γ和γ'在流形上的像相同，只是描述它们的参数不同而已。在时空上这就表现在在时空上的曲线（世界线）是绝对的，而参数的选取是任意的，即你可以选取不同的参数对其进行描述，并且矢量沿某条曲线的平行移动也是绝对的，不依赖于参数的选取。从

以上的分析可以看出，这样的定义是合理的。

有了平行移动算符，我们便可以对流形（单连通流形）上任意两点的矢量进行比较、运算。便可以求矢量场沿某条曲线相对曲线参数的变化率，定义向量场沿流形上某个方向的导数。

定义 1.6： $D_{\dot{\gamma}_t} v$ 称为向量场沿曲线 $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ 方向在 $\gamma(t)$ 点处对参数 t 的协变导数，定义为：

$$D_{\dot{\gamma}_t} v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta \mathrm{t}} [v(\gamma(t+\Delta t)) - \mathrm{P}_t^{t+\Delta t}(\gamma) v(\gamma(t))]$$

从以上定义，我们能够看出矢量 $v(\gamma(t+\Delta t))$、$\mathrm{P}_t^{t+\Delta t}(\gamma) v(\gamma(t)) \in V_{\gamma(t+\Delta t)}$,在同一点的矢量空间内，所以对其进行加减运算是合理的。

有了以上的定义，我们便可以对流形M上的任意向量场定义沿某条曲线的参数的协变导数。但是，从上面的定义我们可以看出，这样的定义也是即不方便的，该协变导数不仅要依赖于曲线的选取，而且还要依赖于曲线参数的选取。这样，如果我们想要知道该向量场在流形M上的变化情况，就需要在流行每个点上定义各个方向的曲线，而且对其参数的选取还要极为小心才可，所以，我们应该寻求一种相比以上定义能更好描述向量场在流形上的变化的导数算符的定义。

我们都知道，流形M上x点的所有向量$X \in T_x M$都能找到过该点的一个一条曲线$\gamma : t \to \gamma(t)$,满足,$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = X$。经过以上分析我们很容易看出，利用定义1.6我们可以定义出流行M上的向量场在某点处沿切向量的导数。即有如下定义：

定义 1.7： 设M是光滑微分流形，$X \in T_x M$是x处的一个切矢量，v是M上取值在向量空间V上的向量场, P是其上定义的平行移动，则可以定义M上关于向量场v的联络（协变导数）D:

$$D_X v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta \mathrm{t}} [v(\gamma(\Delta t)) - \mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma) v(\gamma(0))]$$

其中γ是过x点的一条曲线，满足$\gamma(0) = x; \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = X$

有了以上的定义，我们便可以定义出向量场v在在某点X方向的导数。我们知道，在向量空间中，某个向量对某个参数求导，仍然还是向量。所以，我们不难看出，向量场v在在某点处X方向的导数仍然是x处的一个向量，即$D_X v \in V_x$。从这个性质处发，我们不难知道，如果流形每个点上都取一个切向量X_x,然后在每个点利用该切向量对向量场v求协变导数，即所得结果就相当于在流形M上每一点选定一个向量，如果我们选取的这个切向量是光滑的，不难相信，如此得出的向量场也是光滑的。即我们有下述性质。

性质 1.1：流形M上的联络D是一个映射$D:\Gamma(\mathrm{T(M)})\times\Gamma(\mathrm{V(M)})\to\Gamma(\mathrm{V(M)})$

且$\forall X$、X_1、$X_2\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$ ，v、v_1、$v_2\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$，$\lambda$、$\mu\in\mathbb{F}$，$f$、$g\in C_{\mathbb{F}}^{\infty}(M)$有

$(a)D_X(\lambda v_1+\mu v_2)=\lambda D_X v_1+\mu D_X v_2$

$(b)D_X(fv)=X(f)v+fD_X v$

$(c)D_{fX_1+gX_2}v=fD_{X_1}v+gD_{X_2}v$

证明：要证这些性质，只需证$\forall x\in M$它们都成立即可

(a)设$v(x)=\lambda v_1(x)+\mu v_2(x)$

$D_X v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v(\gamma(0))]$ ，其中$\gamma(t)$满足定义1.7中的条件。则

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{[\lambda v_1(\gamma(\Delta t))+\mu v_2(\gamma(\Delta t))]-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)[\lambda v_1(\gamma(0))+\mu v_2(\gamma(0))]\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{[\lambda v_1(\gamma(\Delta t))+\mu v_2(\gamma(\Delta t))]-[\lambda\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_1(\gamma(0))+\mu\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_2(\gamma(0))]\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{\lambda[v_1(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_1(\gamma(0))]+\mu[v_2(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_2(\gamma(0))]\}$$

$$=\lambda\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v_1(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_1(\gamma(0))]+\mu\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v_2(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v_2(\gamma(0))]$$

$$=\lambda D_X v_1+\mu D_X v_2$$

注：其中第三步用到定义1.5（a）。

$(b)\forall X\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$ ，$v\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$，$f\in C_{\mathbb{F}}^{\infty}(M)$

令$v'(x)=f(x)\cdot v(x)$,则

$D_X v'(x)=D_X[f(x)\cdot v(x)]$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{f(\gamma(\Delta t))\cdot v(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)[f(\gamma(0))\cdot v(\gamma(0))]\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{f(\gamma(\Delta t))\cdot v(\gamma(\Delta t))-f(\gamma(0))\cdot\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)[v(\gamma(0))]\}$$

令$f'(t)=f(\gamma(t))$,则$f'(t)$是以t为自变量的域$\mathbb{F}$上的函数，则有

$$f'(t+\Delta t)=f'(t)+\Delta t\frac{\partial}{\partial t}f'(t)$$

$$\therefore D_X v'(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{f'(\Delta t)\cdot v(\gamma(\Delta t))-f'(0)\cdot\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)[v(\gamma(0))]\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\{[f'(0)+\Delta t\frac{\partial}{\partial t}f'(0)]\cdot v(\gamma(\Delta t))-f'(0)\cdot\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)[v(\gamma(0))]\}$$

$$=f'(0)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma)v(\gamma(0))]+[\frac{\partial}{\partial t}f'(0)]\cdot v(\gamma(0))$$

$$=f'(0)D_X v(\gamma(0))+[\frac{\partial}{\partial t}f'(0)]\cdot v(\gamma(0))$$

有$\gamma(0)=x;\dfrac{\partial}{\partial t}f'(0)=\dfrac{\partial}{\partial t}f(\gamma(0))=X(f)(x)$

$\therefore D_X v'(x)=[X(f)(x)]v(x)+f(x)D_X v(x)$

(c)先证$D_{fX}v = fD_X v$

设γ是M上过x的一条曲线，满足$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=X(x)$,易证$\gamma'(t)=\gamma(at)$,其中$a=f(x)$

则$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma'(t)=a\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=f(x)X(x)$

$$\begin{aligned}D_{fX}v(x) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma'(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma')v(\gamma(0))]\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma(a\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma')v(\gamma(0))]\\ &= a\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{a\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma(a\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma')v(\gamma(0))]\end{aligned}$$

又由定义1.5(b) ：$\mathrm{P}_{t_0'}^{t_1'}(\gamma')(v)=\mathrm{P}_{t_0}^{t_1}(\gamma)(v)$ （其中$\gamma'(t_0')=\gamma(t_0)$； $\gamma'(t_1')=\gamma(t_1)$;）

和$\gamma'(t)=\gamma(at)$得$\gamma'(\Delta t)=\gamma(a\Delta t)$

$\therefore \mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma')v=\mathrm{P}_0^{a\Delta t}(\gamma)$

$$\begin{aligned}\therefore D_{fX}v(x) &= a\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{a\Delta \mathrm{t}}[v(\gamma(a\Delta t))-\mathrm{P}_0^{a\Delta t}(\gamma)v(\gamma(0))]\\ &= aD_X v(x)\\ &= f(x)D_X v(x)\end{aligned}$$

$\therefore D_{fX}v = fD_X v$

再证$D_{X_1+X_2}v = D_{X_1}v + D_{X_2}v$

n维流形M局域同胚于$\mathbb{R}^n$,则$\forall x\in M$,存在其领域U和$\mathbb{R}^n$中开集同胚，则存在坐标映射$\varphi:U\to\mathbb{R}^n$中开集,且满足$\varphi^\mu(x)=x^\mu=0$,(其中$\mu=1、2...n$)

$\gamma^\mu:\mathbb{R}\to U$是$M$中的一条过$x$点的曲线，满足$\gamma^\mu(t)=\varphi^{-1}(x^\mu(t))$,其中$x^\mu(t)$=$\mathrm{X}^\mu\cdot t$,后面的$\mathrm{X}^\mu$是一个常数，容易想象该曲线是满足在坐标系中其坐标显示为直线的过x的曲线，易知$\forall x'\in U$,有且仅有一条连接x'与x的上述曲线。若我们在V_x中选取一个基底$\{\eta_A(x)\}$,则我们可以通过曲线γ^μ在U中每一点定义一个基底$\{\eta_A(x')\}$，满足$\eta_A(x')$=$\mathrm{P}_0^t(\gamma^\mu)\eta_A(x)$,利用上述构造方法，我们便可以得到一个$U$上矢量空间的一个光滑基底场。

易证，$\forall X=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in T_xM,\gamma^\mu(t)=\varphi^{-1}(x^\mu(t))$,其中$x^\mu(t)$=$\mathrm{X}^\mu\cdot t$,满足$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma(t)=X$

$$\begin{aligned}则D_X\eta_A(x) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[\eta_A(\gamma^\mu(\Delta t))-\mathrm{P}_0^{\Delta t}(\gamma^\mu)\eta_A(\gamma^\mu(0))]\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}[\eta_A(\gamma^\mu(\Delta t))-\eta_A(\gamma^\mu(\Delta t))]\\ &= 0\end{aligned}$$

由性质（a）（b）可得$\forall v \in \Gamma(V(M))$，$v = v^A \eta_A$，

$$D_X v(x) = D_X(v^A \eta_A)(x) = [X(v^A)(x)]\eta_A(x)$$

则有$\forall X_1$、$X_2 \in T_x M$

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2} v(x) &= [(X_1 + X_2)(v^A)(x)]\eta_A(x) \\ &= [X_1(v^A)(x)]\eta_A(x) + [X_2(v^A)(x)]\eta_A(x) \\ &= D_{X_1} v(x) + D_{X_2} v(x) \end{aligned}$$

下面，我们先来考察余切向量，我们都知道余切向量是切空间到域$\mathbb{F}$上的线性映射，其定义为$T_x^* M = \ell(T_x M, \mathbb{F})$，即$\forall \omega \in T_x^* M$是一个映射$\omega_x : T_x M \to \mathbb{F}$。当$x$取遍整个流形$M$时，$\omega$称为流形$M$上的余切向量场，也称为流形$M$上的一形式场，流形$M$上的所有余切向量场组成的集合记做$\Gamma(T^* M)$（余切场）或者$A^1(M)$（1形式场）。

从以上的分析我们不难知道$A^1(M) = \ell(TM, C^r_{\mathbb{F}}(M))$，作为推广，我们不要求该映射是到流形$M$上函数的映射的，而是到流形$M$上任意向量场的映射。有如下定义

定义 1.8：设M是n维流形，其上有线性空间V结构，则定义线性映射ω:

$$\omega: \overbrace{\Gamma(T(M)) \otimes \ldots \otimes \Gamma(T(M))}^{l\text{个}} \to \Gamma(V(M))$$

称为流形M上取值在线性空间V上的l形式，简记为值在V上的l形式。记所有值在M上的l形式为$A^l(M, V)$。当V取作$\mathbb{F}$时，$A^l(M, \mathbb{F}) = A^1(M)$，称为$M$上的一形式场。

注：$\forall \omega \in A^l(M, V), X_i \in \Gamma(TM)$,则$\omega(X_1、X_2、\ldots、X_l) \in V(M)$,如果在流形$M$选取关于$V$的标架场$\{\eta_A\}$,则$\omega$可在该组基地场下展开，有$\omega = \omega^A \eta_A$,其中其中每个系数$\omega^A$都是流形$M$上的l形式场，即$\omega^A \in A^l(M)$。

根据前面对联络的分析，可以看出，联络算子$D: \Gamma(\mathrm{T(M)}) \times \Gamma(\mathrm{V(M)}) \to \Gamma(\mathrm{V(M)})$是一个线性依赖于$\Gamma(\mathrm{T(M)})$在$\Gamma(\mathrm{V(M)})$中的算子。现在，我们做一个比较直观的假设，我们把联络算子看成做一种拌菜的调料，而$\Gamma(\mathrm{T(M)})$和$\Gamma(\mathrm{V(M)})$是这个菜所需的原料，如果我们有了做这个菜的调料和原料，我们便能把这个菜做出来，而这个菜代表了$\Gamma(\mathrm{V(M)})$。现在，如果你今天运气不是太好，出门没有买到第一种原料$\Gamma(\mathrm{T(M)})$，然后回到家却尝试着把调料和第二种原料混合了起来，变成了一种新的菜。值得注意的是，如果你有锲而不舍的精神，去找了很多商店，最后还是把第一种原料买了回来，把它在加入到刚刚做好的那种新菜中，便又做好了你最初想要做的那道菜，也就是$\Gamma(\mathrm{V(M)})$。现在，我们再来考察开始缺少第一种原料的新菜，我们可以把它当成一个工具，只要你放入第一种原料$\Gamma(\mathrm{T(M)})$，它就变成你最初想要做的菜$\Gamma(\mathrm{V(M)})$。如果抽象成数学概念，第二种原料和调料料混合，就相当于联络算子作用在$\Gamma(\mathrm{V(M)})$上，然后它们最后得到的成果便成了一个算子，该算子作用在$\Gamma(\mathrm{T(M)})$就变成了$\Gamma(\mathrm{V(M)})$。并且，从性质1.1，我们还能知道，该算子在$\Gamma(\mathrm{T(M)})$上的作用是线性的。（注：以上叙述中的第二种原料和最后的成品虽然都用$\Gamma(\mathrm{V(M)})$代表，但是代表的是不同的东西）

所以，综上，$\forall v\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$,记$\mathrm{D}_{(\dots)}(v)$为$D(v)$,易知它是一中线性映射$D(v)$: $\Gamma(\mathrm{T(M)})\to\Gamma(\mathrm{V(M)})$，从定义1.8，我们很容易看出$D(v)$是流形$M$上的取值在线性空间$V$上的1形式。

定义 1.9：流形M上关于向量空间V的联络为D，$\forall v\in\Gamma(V(M)), X\in\Gamma(T(M))$,定义$D(v)(\mathrm{X})=D_X(v)$。

性质 1.2：流形上的联络D是一个映射D：$\Gamma(\mathrm{V(M)})\to A^1(M，V)$

v、v_1、$v_2\in\Gamma(\mathrm{V(M)})$，$\lambda$、$\mu\in\mathbb{F}$，$f$、$g\in C_{\mathbb{F}}^{\infty}(M)$有

$(a)D(\lambda v_1+\mu v_2)=\lambda Dv_1+\mu Dv_2$

$(b)D(fv)=(df)v+fDv$

证明：性质（a）按定义易证，现证（b）。

$\forall X\in\Gamma(T(M))$

$$D(fv)(X)=D_X(fv)$$
$$=X(f)v+fD_X(v)$$

又$X(f)=df(\mathrm{X})$

$$\therefore D(fv)(X)=df(X)+fD_X(v)$$
$$=df(X)+f[D(v)(X)]$$
$$=[df+fD(v)](X)$$
$$\therefore D(fv)=(df)v+fDv$$

2、联络在局域坐标系下的性质

上一小节我们给出了联络的定义，选定流形M上关于向量空间V的联络就是选定向量沿曲线的平行移动，也便是给出流形上向量场的协变导数运算，大家都知道，向量空间是一个抽象的空间，虽然里面定义了向量的加法和数乘运算，但是抽象描述它沿曲线的平行移动也是极为困难的，所有，我们需要将向量场解析表达出来，把抽象运算转换为代数运算。即我们需要在流形的每点都选定向量空间V_x的一组基底，由微分流形的性质，我们知道，在流形的每一点都存在领域，一定能找到流形M关于向量空间V的光滑标架场，在后面的讨论中，在不强调的情况下，我们都是指的光滑标架场。

在流形M上选定关于向量空间V局域标架场$\{\eta_A\},\forall v\in\Gamma(V(M)),v$可在基底场$\{\eta_A\}$下展开，有$v=v^A\eta_A$,其中$v^A$是向量场$v$在基底场$\{\eta_A\}$下的分量。

则$D(v)=D(v^A\eta_A)$

$$=(dv^A)\eta_A+v^A D(\eta_A)$$

由$D(v)$、$(dv^A)\eta_A\in A^1(M,V)$，知$D(\eta_A)\in A^1(M,V)$，所有$D(\eta_A)$可在基底$\{\eta_A\}$下展开，记为$D(\eta_A)$=$\omega^B{}_A\eta_B$,由上一小节定义1.8注释知$\omega^B{}_A\in A^1(M)$,称$\omega^B{}_A$为流形M上关于V的联络1形式。则

$$D(v)=(dv^A)\eta_A+v^A\omega^B{}_A\eta_B$$

从上面的分析我们可以看出，当选定了基底场$\{\eta_A\}$后，只要给出每个基底的协变导数，就能把任意向量的协变导数表达出来。下面，我们就着重讨论基底场的协变导数的性质。

性质 2.1：设$\{\eta_A\}$、$\{\eta'_A\}$是流形M上两个关于向量空间V的标架场，$\omega^B{}_A$、$\omega'^B{}_A$分别是联络在$\{\eta_A\}$、$\{\eta'_A\}$下的联络1形式，η'_A=$a^B{}_A\eta_B,\eta_B$=$(a^{-1})^B{}_A\eta'_B$，则

$$\omega'^B{}_A=(a^{-1})^B{}_C da^C{}_A+a^D{}_A\omega^C{}_D(a^{-1})^B{}_C$$

证明：
$$\begin{aligned}\omega'^B{}_A\eta'_B&=D\eta'_A\\&=D(a^B{}_A\eta_B)\\&=d(a^B{}_A)\eta_B+a^B{}_A D\eta_B\\&=d(a^B{}_A)\eta_B+a^B{}_A\omega^C{}_B\eta_C\\&=d(a^B{}_A)(a^{-1})^D{}_B\eta'_D+a^B{}_A\omega^C{}_B(a^{-1})^D{}_C\eta'_D\\&=\omega'^D{}_A\eta'_D\end{aligned}$$

$$\therefore d(a^B{}_A)(a^{-1})^D{}_B+a^B{}_A\omega^C{}_B(a^{-1})^D{}_C=\omega'^D{}_A$$

即联络1形式不能作为张量场分量来看待，因为它不满足张量场分量的坐标变换规则（张量变换律）

以上的分析我们是把它写成分量的形式进行研究的，下面我们把向量空间中的向量写成矩阵形式。即当我们选定基底场$\{\eta_A\}$后，$\forall v \in \Gamma(V(M))$,$v$可写成

$$v = \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_m\end{pmatrix}$$

$$D(v) = \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dv_1 \\ \vdots \\ dv_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}D\eta_1 & \ldots & D\eta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_m\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}[d\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_m\end{pmatrix}] + [D\begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}]\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_m\end{pmatrix}$$

则我们可以写出联络1形式在基底$\{\eta_A\}$下的矩阵表示

$$D\begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D\eta_1 & \ldots & D\eta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega^A{}_1\eta_A & \ldots & \omega^A{}_m\eta_A\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1{}_1 & \ldots & \omega^1{}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^m{}_1 & \ldots & \omega^m{}_m\end{pmatrix}$$

记$\omega = \begin{pmatrix}\omega^1{}_1 & \ldots & \omega^1{}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^m{}_1 & \ldots & \omega^m{}_m\end{pmatrix}$也称为联络$D$在基底$\{\eta_A\}$下的联络1形式。

设基底$\{\eta'_A\}$为另一个基底场，与$\{\eta_A\}$之间的变换关系为

$\begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}A$,其中$A$是一个可逆矩阵。$\omega$、$\omega'$分别为它们的联络1形式，则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix}\omega' &= D\begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix} \\ &= D[\begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}A] \\ &= [D\begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}]A + \begin{pmatrix}\eta_1 & \ldots & \eta_m\end{pmatrix}dA \\ &= \begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix}A^{-1}\omega A + \begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix}A^{-1}dA \\ &= \begin{pmatrix}\eta'_1 & \ldots & \eta'_m\end{pmatrix}[A^{-1}\omega A + A^{-1}dA]\end{aligned}$$

$$\therefore \omega' = A^{-1}\omega A + A^{-1}dA$$

如果我们在流形M上取局域坐标系，则它会在切空间中诱导一个自然切标架场和余切标架场，向量空间V上的在基底$\{\eta_A\}$下的联络一形式ω可在该自然余切标架场展开。设$\{x^\mu\}$为M上的一个局域坐标系，则$\{dx^\mu\}$为其诱导的余切标架场，则由前面分析可知$\omega^A{}_B \in A^1(M)$,则它可以在余切标架场$\{dx^\mu\}$下展开，有$\omega^A{}_B = \omega_\mu{}^A{}_B dx^\mu$写成矩阵形式，$\omega = \omega_\mu dx^\mu$。

记$D_\mu(v)=D_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}(v)=D(v)(\frac{\partial}{\partial x^\mu})$

$$=\begin{pmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_m\end{pmatrix}[d\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})]+\begin{pmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_m\end{pmatrix}\omega(\frac{\partial}{\partial x^\mu})\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_m\end{pmatrix}[\partial_\mu\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}]+\begin{pmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_m\end{pmatrix}\omega_\mu\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

从导数算符的定义，我们很容易知道$D_\mu(v)(x)$是过x点的x^μ坐标轴的积分曲线的以x^μ为参数的协变导数，我们称D_μ为在坐标系$\{x^\mu\}$下的协变导数，ω_μ为其联络系数。

下面我们分析一种特殊的联络，切空间上的联络。我们只需要另$V_x=T_xM$,便可以把前面的结论用于切空间上面。当我们选取了局域坐标系$\{x^\mu\}$后，便会在切空间和余切空间内诱导出自然切标架场$\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$和余切标架场$\{dx^\mu\}$，同前面分析一般矢量空间情况类似，我们只需要知道联络在切标架场下的联络1形式，下面我们不直接求联络1形式，而是求联络D在坐标系$\{x^\mu\}$下的关于标架场$\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$的联络系数，且用分量形式，我们$\omega_\mu{}^\sigma{}_\nu$记为$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$。

则$D_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}$

我们称$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$是联络D在局域坐标系$\{x^\mu\}$下的联络系数。

性质 2.2：设$\{x^\mu\}$和$\{y^\mu\}$是流形M上两个局域坐标系,且两者之间存在坐标变换，$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$、$\bar{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}$分别为联络$D$在局域坐标系$\{x^\mu\}$和$\{y^\mu\}$下的联络系数，则

$$\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}=\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\sigma}(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\mu y^\nu})+\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma}$$

证明：$\bar{\Gamma}^\kappa{}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\kappa}=D\frac{\partial}{\partial y^\nu}(\frac{\partial}{\partial y^\mu})$

$$=D(\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\sigma})(\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho})$$

$$=\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu}\{(\frac{\partial}{\partial x^\sigma})[d\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}](\frac{\partial}{\partial x^\rho})+\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}D(\frac{\partial}{\partial x^\sigma})(\frac{\partial}{\partial x^\rho})\}$$

$$=\{\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\sigma}(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\mu y^\nu})+\frac{\partial x^\rho}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma}\}(\frac{\partial}{\partial y^\kappa})$$

性质 2.3：$\gamma:\mathbb{R}\to M$是M中的一条曲线，$v\in\Gamma(T(M))$，若v满足

$$D_{\dot{\gamma}}v=0$$

则向量场v沿线平移，在选定V上标架场$\{\eta_A\}$和局域坐标系$\{x^\mu\}$后，上式表为：

$$\frac{\partial}{\partial t}v^A+\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\omega_\mu{}^A{}_B v^B=0$$

我们知道，在经典理论中，描述点粒子的运动是用其四速度以及它构造出来的力学量，利用它们在时空中的协变导数给出运动方程，我们先抛开物质场是如何决定时空联络这件事，假定时空中切空间的联络已经确定，那么粒子的在不受到其他力的时候其世界线应该满足怎样的方程？根据对时空图的分析，我们都知道，粒子的四速度应该是粒子的世界线在其固有时下的切向量。那么，对于自由粒子，它的世界线的切向量又具有怎样的性质呢？根据相对论的基本原理，在不受其他力的时候，粒子实际世界线应该具有切矢沿线平移的性质，我们称满足以上条下的曲线称为测地线。即推广到一般流形上，有如下定义。

定义 2.1：$\gamma:\mathbb{R}\to M$是M中的一条曲线，我们称它为流形M测地线，若满足

$$D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$$

注：若流形M上选定局域坐标系$\{x^\mu\}$,测地线方程在局域坐标系中表为

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2}+\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0$$

容易看出上式$\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$中$\mu$、$\nu$对称，利用$\mu$、$\nu$对称可将上式改为

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2}+\Lambda^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial t}=0 \qquad (\text{其中}\Lambda^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{(\mu\nu)})$$

容易看出若该联络是无挠的（其中挠率定义为$T^\sigma{}_{\mu\nu}=2\Gamma^\sigma{}_{[\mu\nu]}$）,则有$\Lambda^\sigma{}_{\mu\nu}=\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$。

证明：利用性质2.3，易证上式。